SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Daniele Morbidelli

FORMULE DI MEDIA E DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER UNA CLASSE DI OPERATORI PARABOLICI DEGENERI

29 giugno 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. In questa nota studiamo la classe di operatori ultra parabolici del secondo ordine del tipo

$$L = \sum_{j,k=1\dots}^{p_0} a_{j,k}(x,t)\partial^2_{x_j,x_k} + x_j b_{j,k}\partial_{x_k} - \partial_t$$

dove B è una matrice costante e $0 < p_0 < n$. Sotto opportune ipotesi sui coefficienti $a_{j,k}$ costruiamo la soluzione fondamentale classica dell'operatore con il metodo della parametrice. Ne proviamo delle stime locali e dimostriamo una disuguaglianza di Harnack invariante per le soluzioni non negative dell'equazione

$$\mathrm{div} A(z)Du + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u = 0.$$

Abstract. We consider a class of ultraparabolic differential operators of the following type

$$L = \sum_{j,k=1\dots}^{p_0} a_{j,k}(x,t)\partial^2_{x_j,x_k} + x_j b_{j,k}\partial_{x_k} - \partial_t$$

where B is a constant matrix and $0 < p_0 < n$. Under suitable hypothesis on the coefficients $a_{i,j}$ we construct the classical fundamental solution Γ by the parametrix method. We prove a local estimate of Γ and an invariant Harnack inequality for nonnegative solutions of the divergence form equation

$$\mathrm{div} A(z)Du + \langle x, BDu\rangle - \partial_t u = 0.$$

§1. Introduzione, richiami e risultati.

Consideriamo in $\mathbb{R}^{n+1}$ l'operatore differenziale

$$Lu(z) = \operatorname{div}(A(z)Du(z)) + \langle x, BDu(z)\rangle - \partial_t u(z), \tag{1.1}$$

ove $z = (x,t)$ indica il punto di $\mathbb{R}^{n+1}$, la matrice $A(z)$ è semidefinita positiva $n \times n$ per ogni z di $\mathbb{R}^{n+1}$, la matrice B è costante $n \times n$, D e div indicano rispettivamente il gradiente e la divergenza in $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle$ il prodotto interno.

Supponiamo che la matrice $A(z) = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ si scriva nella forma

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

ove $A_0(z)$ è un blocco $p_0 \times p_0$, $(p_0 \le n)$ che soddisfa la seguente ipotesi:

Ipotesi H1. *Esistono due numeri positivi m ed M tali che, per ogni $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ vale:*

$$mI_{p_0} \le A_0(z) \le MI_{p_0}.$$

Facciamo poi l'ulteriore ipotesi:

Ipotesi H2. *La matrice B ha la seguente forma a blocchi:*

$$B = \begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_r \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

dove B_j è un blocco $p_{j-1} \times p_j$, di rango massimo, con $p_0 \ge p_1 \ge \cdots \ge p_r \ge 1$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n$. I blocchi $*$ sono arbitrari.

Se la matrice B soddisfa H2 è noto che l'operatore congelato

$$L_\zeta = \operatorname{div}(A(\zeta)D) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{1.4}$$

è ipoellittico per ogni $\zeta = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (si veda, ad esempio [LP]).

Se inoltre i blocchi $*$ di (1.5) sono tutti nulli, L_ζ è omogeneo di grado due rispetto al gruppo di dilatazioni definito dalla matrice $(n+1) \times (n+1)$

$$D(\lambda) = diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2). \tag{1.5}$$

Là dove non ci sarà possibilità di equivoco indicheremo ancora con $D(\lambda)$ la matrice $n \times n$ $diag(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r})$.

Denoteremo d'ora in poi con $\mathcal{L}$ la classe di operatori (1.1) per i quali la matrice B è della forma a blocchi (1.3); con $\mathcal{L}_0$ la sottoclasse di $\mathcal{L}$ formata da quegli operatori per i quali i blocchi $*$ sono tutti nulli.

È bene ricordare che, per tutti gli operatori della classe $\mathcal{L}$ per i quali la matrice A definita in (1.2) è costante è nota l'espressione esplicita della soluzione fondamentale (si veda (1.11) nel seguito).

Se i coefficienti $a_{i,j}$ sono variabili è stata provata da Weber ([W]), Il'in ([I]) e Sonin ([S]), per una sottoclasse di $\mathcal{L}_0$, l'esistenza della soluzione fondamentale per L, usando il metodo della parametrice. In seguito, in [P1] e [P2], tale costruzione è stata estesa al generico operatore della classe $\mathcal{L}_0$, nell'ipotesi in cui i coefficienti siano hölderiani (in un senso opportuno che verrà precisato nel seguito). In [P1] e [P2] sono inoltre state fornite precise stime puntuali della soluzione fondamentale Γ; una disuguaglianza di Harnack invariante rispetto alla struttura di gruppo definita da $(D(\lambda))$ e, infine, alcune stime globali, dall'alto e dal basso, di Γ.

Tutti i risultati sin qui citati riguardano soltanto operatori della classe $\mathcal{L}_0$. Scopo di questa nota è quello di estenderli alla più generale classe $\mathcal{L}$. La strategia sarà quella di confrontare, su scale di tempo opportunamente piccole, l'operatore

$$L = \operatorname{div}(A(z)D) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{1.6}$$

con:

$$L_0 = \operatorname{div}(A(z)D) + \langle x, B_0 D\rangle - \partial_t \tag{1.7}$$

dove la matrice B_0 si ottiene a partire dalla B di (1.3) mettendo zero al posto di ciascuno dei blocchi $*$:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Richiamiamo ora alcune proprietà notevoli degli operatori per i quali $A(z) = A$ costante (si veda [LP] per una discussione esauriente).

R1. *Gli operatori a coefficienti costanti ($A(z) = A$ costante) commutano con le traslazioni a sinistra del gruppo $(\mathbb{R}^{n+1}, \circ)$, la cui legge di composizione è così definita:*

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \qquad E(t) = exp(-tB^T) \tag{1.9}$$

R2. *Posto $\sigma = t - \tau$ e*

$$C(\sigma) = \int_0^\sigma E(s)AE^T(s)ds, \tag{1.10}$$

la soluzione fondamentale $\Gamma(z,\zeta) = \Gamma(x,t;\xi,\tau)$ si scrive nella forma (vedi [H]):

$$\Gamma(z,\zeta) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det C(\sigma)}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(\sigma)(x - E(\sigma)\xi), x - E(\sigma)\xi\rangle - \sigma tr B\Big), \tag{1.11}$$

per $\sigma = t - \tau > 0$. $\Gamma(z,\zeta) = 0$, se $t \le \tau$. La matrice $C(t)$ è definita positiva per ogni $t > 0$, grazie alle ipotesi H1 *ed* H2.

R3. *Vale la proprietà di riproduzione:*

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;y,s)\Gamma(y,s;\xi,\tau)dy. \tag{1.12}$$

Poniamo poi

$$Q = p_0 + 3p_1 + \cdots + (2r+1)p_r \tag{1.13}$$

(*dimensione omogenea spaziale*). Risulta banalmente $\det D(\lambda) = \lambda^{Q+2}$.

R4. *Se $B = B_0$ (vedi (1.8)) vale la relazione seguente (vedi [LP])):*

$$C(t) = D(\sqrt{t})C(1)D(\sqrt{t}) \tag{1.14}$$

Per formulare delle ipotesi sui coefficienti $a_{i,j}$ che siano modellate sulle proprietà di invarianza degli operatori diamo una definizione di norma:

Definizione 1.1. *Per ogni $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ poniamo:*

$$|z|_B = |t|^{\frac{1}{2}} + |x|_B, \qquad |x|_B = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{q_j}},$$

essendo q_j gli interi tali che:

$$D(\lambda) = diag(\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, ..., \lambda^{q_n}, \lambda^2) \tag{1.15}$$

Risulta, banalmente,

$$|D(\lambda)z|_B = \lambda|z|_B \quad \lambda \geq 0 \tag{1.16}$$

Definizione 1.2. *Sia $\alpha \in]0,1]$. Diremo che una funzione $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ è B-hölderiana di esponente α se esiste $c \geq 0$ e tale che:*

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq c|\zeta^{-1} \circ z|_B^{\alpha}, \tag{1.17}$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Possiamo ora formulare le ipotesi sui coefficienti $a_{i,j}$:

Ipotesi H3. *I coefficienti $a_{i,j}$ sono B-hölderiani (tutti con lo stesso esponente $\alpha \in]0,1]$).*

Ipotesi H4. *Le funzioni $\partial_{x_j} a_{j,k}(z)$ sono limitate e $B-$Hölderiane per ogni $j,k = 1,...,p_0$:*

Introduciamo infine le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} &H_\varrho = \{z = (D(\varrho)x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : -\varrho^2 \leq t \leq 0,\ |x| \leq 1\}, \\ &H_\varrho^- = H_\varrho \cap \{t = -\varrho^2\}, \\ &H_\varrho(z_0) = z_0 \circ H_\varrho, \quad H_\varrho^-(z_0) = z_0 \circ H_\varrho^-. \end{aligned} \tag{1.18}$$

I principali risultati di questa nota sono quelli che seguono:

Teorema 1.3. *Sia L della forma (1.1) e verifichi le ipotesi* H1,...,H4. *Allora esiste la (una) soluzione fondamentale di L.*

Teorema 1.4. *Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K > 0$ e tale che:*

$$(1-\varepsilon)Z(z,\zeta) \leq \Gamma(z,\zeta) \leq (1+\varepsilon)Z(z,\zeta) \tag{1.19}$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$ e tali che $Z(z,\zeta) \geq K$.

Osservazione. I teoremi appena enunciati sono validi (come si vedrà nel seguito) anche per operatori *non in forma di divergenza*

$$L = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(z)\partial^2_{x_j,x_k} + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{1.20}$$

sotto le sole ipotesi H1,H2, H3.

Teorema 1.5. (Disuguaglianza di Harnack invariante). *Sia u soluzione non negativa di $Lu = 0$ in Ω aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, con L della forma (1.1) che soddisfi* H1,...,H4. *Allora per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $\varrho > 0$ tale che*

$$\sup_{H^-_{\vartheta r}(z_0)} u \leq Cu(z_0) \tag{1.21}$$

per ogni $r < \varrho$.

Ringraziamenti. Si ringrazia il prof. E. Lanconelli per avere proposto il problema; S. Polidoro per le numerose utili conversazioni.

§2. Costruzione della soluzione fondamentale: il metodo della parametrice.

Poniamo, per ogni fissato $w \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$L_w = \operatorname{div}(A(w)D) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{2.1}$$

e indichiamo con $Z_w(z,\zeta)$ la soluzione fondamentale di L_w. Scriveremo sempre, d'ora in poi, $Z(z,\zeta)$ in luogo di $Z_\zeta(z,\zeta)$. Il metodo di Levi consiste nello scrivere la soluzione fondamentale nella forma seguente:

$$\Gamma(z,\zeta) = Z(z,\zeta) + J(z,\zeta), \tag{2.2}$$

cercando poi di determinare la funzione J nella forma

$$J(z,\zeta) = \int_\tau^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} Z(z;y,s)\Phi(y,s;\zeta)dy\Big)ds. \tag{2.3}$$

Applicando L alla (2.2) e supponendo di poter portare le derivate sotto il segno di integrale, si verifica con alcuni passaggi formali che la funzione Φ soddisfa la seguente equazione integrale:

$$\Phi(z,\zeta) = LZ(z,\zeta) + \int_\tau^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} LZ(z,w)\Phi(w,\zeta)dy\Big)ds. \tag{2.4}$$

La (2.4) si può risolvere col metodo delle approssimazioni successive, ponendo:

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}(LZ)_k(z,\zeta) \tag{2.5}$$

dove

$$\begin{aligned}(LZ)_1(z,\zeta) &= LZ(z,\zeta),\\ (LZ)_{k+1}(z,\zeta) &= \int_\tau^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} LZ(z,w)(LZ)_k(w,\zeta)dy\Big)ds.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Per lo studio della convergenza della serie sopra scritta seguiremo un metodo analogo a quello utilizzato da Polidoro in [P1], opportunamente modificato.

Introduciamo le notazioni seguenti:

$$C_\zeta(t) = \int_0^t E(s)A(\zeta)E^T(s)ds, \quad E(s) = e^{-sB^T}, \tag{2.7}$$

$$C_{0,\zeta} = \int_0^t E_0(s)A(\zeta)E_0^T(s)ds, \quad E_0(s) = e^{-sB_0^T}. \tag{2.8}$$

Valgono allora i seguenti risultati:

Lemma 2.1. *Posto*

$$M_\zeta(t) = D(t^{-\frac{1}{2}})(C_\zeta(t) - C_{0,\zeta}(t))D(t^{-\frac{1}{2}})$$

risulta:

$$\|M_\zeta(t)\| = tf(\zeta,t)$$

con $\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^{n+1}} f(\zeta,t) = g_1(t)$ *limitata in un intorno di* $t=0$.

Lemma 2.2. *Risulta*

(i) $$\langle C_\zeta(t)x,x\rangle = \langle C_{\zeta,0}(t)x,x\rangle(1+tf_1(x,\zeta,t))$$

(ii) $$\langle C_\zeta^{-1}(t)x,x\rangle = \langle\, C_{\zeta,0}^{-1}(t)x,x\rangle(1+t(f_2(x,\zeta,t))$$

dove

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \zeta\in\mathbb{R}^{n+1}}} (|f_1(x,\zeta,t)| + |f_2(x,\zeta,t)|) \le g_2(t)$$

e $g_2(t)$ *è limitata in un intorno di* $t=0$.

Lemma 2.3. *Vale*

$$\det C_\zeta(t) = \det C_{0,\zeta}(t)(1 + tf(t,\zeta)) = t^{\frac{Q}{2}} \det C_{\zeta,0}(1)(1 + tf(t,\zeta))$$

con $\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}} f(t,\zeta) \leq g_3(t)$ *limitata attorno a zero.*

I procedimenti per provare queste affermazioni sono identici a quelli usati per le proposizioni analoghe nel caso in cui la matrice A è a coefficienti costanti ([LP], Lemmi 3.2 e 3.3).

Essendo le funzioni $g_i(t)$ dei Lemmi 2.2 e 2.3 limitate in un intorno di zero si può affermare che esiste una costante $\sigma_0 > 0$ tale che $|tg(t)| \leq \frac{1}{2}$, se $|t| \leq \sigma_0$. Mostreremo dapprima l'esistenza della soluzione fondamentale $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ nella striscia $\mathbb{R}^n \times]\tau, \tau + \sigma_0[$, con $(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fissato. Fatto ciò prolungheremo Γ a tutto lo spazio.

Osserviamo che i Lemmi 2.1, 2.2, 2.3 valgono anche per le due matrici (che useremo nel seguito)

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t E(s) J E^T(s) ds \\ H_0(t) &= \int_0^t E_0(s) J E_0^T(s) ds, \end{aligned} \tag{2.10}$$

ove $J = \begin{pmatrix} I_{p_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Presentiamo ora alcuni lemmi che utilizzeremo per dimostrare la convergenza della serie (2.5). Osserviamo esplicitamente che i risultati che seguono sono formalmente analoghi a quelli di [P1], ma valgono solo su scale di tempo non superiori a σ_0.

Lemma 2.4. *Esiste una costante $C > 0$ tale che, per $j,k = 1,...,p_0$ risulta, per $0 \leq t \leq \sigma_0$, $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left|\left(C_\zeta^{-1}(t)y\right)_k\right| \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \left| D\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) y \right| \tag{2.11}$$

$$\left|\left(C_\zeta^{-1}(t)\right)_{j,k}\right| \leq \frac{c}{t} \tag{2.12}$$

($(x)_k$ indica la $k-$esima componente del vettore x).

Le dimostrazioni di (2.11) e (2.12) si ottengono in modo elementare a partire dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} \left|\left(C_\zeta^{-1}(t)y\right)_k\right| &\leq \left|\left(\left(C_\zeta^{-1}(t) - C_{\zeta,0}^{-1}(t)\right)y\right)_k\right| + \left|\left(C_{\zeta,0}^{-1}(t)y\right)_k\right|, \\ \left|\left(C_\zeta^{-1}(t)\right)_{j,k}\right| &\leq \left|\left(C_\zeta^{-1}(t) - C_{\zeta,0}^{-1}(t)\right)_{j,k}\right| + \left|\left(C_{\zeta,0}^{-1}(t)\right)_{j,k}\right| \end{aligned} \tag{2.13}$$

usando i Lemmi 2.1, 2.2, la stima $mI_{p_0} \leq A_0(z) \leq MI_{p_0}$ e la proprietà R4, che è soddisfatta dalla matrice $C_{\zeta,0}(t)$.

Lemma 2.5. *Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Poniamo*

$$\widetilde{L} = 4(M+\varepsilon)\Delta_{p_0} + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{2.14}$$

(Δ_{p_0} indica il laplaciano rispetto alle prime p_0 variabili). Poniamo poi $\eta = D\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right)(x - E(t-\tau)\xi)$, $z = (x,t)$, $\zeta = (\xi,\tau)$.

Allora, se indichiamo con $\widetilde{\Gamma}$ la soluzione fondamentale di $\widetilde{L}$, per ogni polinomio p in $\mathbb{R}$ esiste una costante c, dipendente da p, tale che

$$|p(|\eta|)Z(z,\zeta)| \le c\widetilde{\Gamma}(z,\zeta) \tag{2.15}$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$ tali che $t - \tau \le \sigma_0$.

Dimostrazione. Poniamo, per comodità , $s = t - \tau$ ed $\alpha = x - E(s)\xi$. Si ha, per i Lemmi 2.2 e 2.3 ,

$$\begin{aligned}
p(|\eta|)Z(z,\zeta) &= \frac{p(|\eta|)}{\sqrt{\det C_\zeta(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\langle C_\zeta^{-1}(s)\alpha,\alpha\rangle - s\,trB\Big) \le \\
&\le \frac{cp(|\eta|)}{s^{Q/2}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\langle C_{\zeta,0}^{-1}(s)\alpha,\alpha\rangle(1+sg(s))\Big)e^{\sigma_0|trB|} \le \\
&\le \frac{cp(|\eta|)}{\sqrt{\det \widetilde{C}(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{8}\langle C_{\zeta,0}^{-1}(1)\eta,\eta\rangle\Big) \le
\end{aligned}$$

poiché $C_{\zeta,0}(1) \le MH_0(1)$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{cp(|\eta|)}{\sqrt{\det \widetilde{C}(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{8M}\langle H_0^{-1}(1)\eta,\eta\rangle\Big) \le \\
&\le \frac{c}{\sqrt{\det \widetilde{C}(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{8(M+\varepsilon)}\langle H_0^{-1}(1)\eta,\eta\rangle\Big) \le \\
&\le \frac{c}{\sqrt{\det \widetilde{C}(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{8(M+\varepsilon)}\langle H_0^{-1}(s)\alpha,\alpha\rangle\Big) \le
\end{aligned}$$

dato che il Lemma 2.2 vale anche con H in luogo di C_ζ

$$\le \frac{c}{\sqrt{\det \widetilde{C}(s)}} \exp\Big(-\frac{1}{4}\Big\langle \frac{H^{-1}(s)}{4(M+\varepsilon)}\alpha,\alpha\Big\rangle\Big) \le c\widetilde{\Gamma}(z,\zeta).$$

Utilizzando i Lemmi 2.4 e 2.5, il problema della convergenza della serie (2.5) può essere affrontato esattamente come in [P1] ottenendo risultati analoghi a quelli del lavoro citato su striscie di "altezza" non superiore a σ_0. Enunciamo semplicemente i risultati:

Proposizione 2.6. Detti $z = (x,t)$ e $\zeta = (\xi,\tau)$, valgono le seguenti affermazioni:

A. *Risulta, se* $0 < t - \tau < \sigma_0$*:*

$$|Z(z,\zeta)| \le c\widetilde{\Gamma}(z,\zeta),$$
$$|\partial_{x_k} Z(z,\zeta)| \le \frac{c}{\sqrt{t-\tau}}\widetilde{\Gamma}(z,\zeta),$$
$$|\partial^2_{x_j,x_k} Z(z,\zeta)| \le \frac{c}{t-\tau}\widetilde{\Gamma}(z,\zeta).$$

B. *Per ogni intero* k*, se* $0 < t - \tau < \sigma_0$*, vale la stima:*

$$|(LZ)_k(z,\zeta)| \le c^k \frac{G\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{G\left(\frac{\alpha k}{2}\right)}(t-\tau)^{\frac{\alpha k}{2}-1}\widetilde{\Gamma}(z,\zeta).$$

(G *indica la funzione Gamma di Eulero). Esiste poi* $k_0 \in \mathbf{N}$ *tale che la funzione* $(LZ)_k(z,\zeta)$ *è limitata per* $k > k_0$ *e* $t - \tau < \sigma_0$*. Inoltre, per ogni* $\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$ *la serie*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (LZ)_k(z,\zeta)$$

converge uniformemente per $z \in \mathbb{R}^n \times]\tau, \tau + \sigma_0[$.

C. *Definita per* $t - \tau < \sigma_0$

$$\Phi(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} (LZ)_k(z,\zeta),$$

risulta soddisfatta la stima:

$$|\Phi(z,\zeta)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{2}}}\widetilde{\Gamma}(z,\zeta),$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tali che* $t - \tau < \sigma_0$.

D. *Risulta, per* $z \ne \zeta$*,* $t - \tau < \sigma_0$*,*

$$|J(z,\zeta)| \le c(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\widetilde{\Gamma}(z,\zeta). \tag{2.17}$$

Inoltre la soluzione fondamentale $\Gamma = Z + J$ *definita in (2.2) soddisfa:*

$$|\Gamma(z,\zeta)| \le c\widetilde{\Gamma}(z,\zeta). \tag{2.18}$$

Tutte le affermazioni della Proposizione 2.6 si provano in modo analogo a quelle corrispondenti in [P1], utilizzando i Lemmi 2.4 e 2.5.

Utilizzando le stime precedenti proviamo ora la seguente proposizione:

Proposizione 2.7. *Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Allora per ogni $(x,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ si ha:*

$$\lim_{(x,t)\to(\bar{x},\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi) d\xi = f(\bar{x}). \tag{2.19}$$

Dimostrazione. Scriviamo, detti $z = (x,t)$ e $\zeta = (\xi,\tau)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z,\zeta) f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} Z(z,\zeta) f(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} J(z,\zeta) f(\xi) d\xi = I_1 + I_2. \tag{2.20}$$

Proviamo dapprima che $I_2 \to 0$:

$$\begin{aligned} |I_2| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^n} J(x,t;\xi,\tau) f(\xi) d\xi \Big| \leq \text{(per la Proposizione 2.6-D)} \\ &\leq c(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Gamma}(x,t;\xi,\tau) d\xi = \\ &= c(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_\infty \longrightarrow 0, \qquad \text{per } t \to \tau. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi) d\xi - f(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(x,t;\xi,\tau)(f(\xi) - f(\bar{x})) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4}} (f(E(\tau-t)(x - C_\zeta^{\frac{1}{2}}(t-\tau)y)) - f(\bar{x})) dy \longrightarrow 0, \quad ,(x,t) \to (\bar{x},\tau), \end{aligned}$$

per il Teorema di Lebesgue. (Nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'espressione esplicita, per $t > \tau$

$$Z(z,\zeta) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det C_\zeta(t)}} \exp\big(-\frac{1}{4}\langle C_\zeta^{-1}(t)(x - E(t-\tau)\xi), (x - E(t-\tau)\xi)\rangle - (t-\tau)\mathrm{tr}B\big),$$

e si è fatto il cambio di variabile $y = C_\zeta^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)(x - E(t-\tau)\xi)\big)$. □

Per verificare che la funzione $\Gamma(z,\zeta)$ definita in (2.2) è soluzione fondamentale classica di L proviamo infine che, fissato $\zeta = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$, la funzione $z = (x,t) \longmapsto \Gamma(z,\zeta)$ è di classe C^2 nelle prime p_0 variabili e che ha derivata continua lungo il campo

$$Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t, \tag{2.21}$$

nella striscia $\mathbb{R}^n \times]\tau, \tau + \sigma_0[$.

Enunciamo i risultati nella seguente proposizione, omettendone le prove.

Proposizione 2.8. *Per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}$, per ogni $j,k \leq p_0$ esistono e sono continue su $\mathbb{R}^n \times]\tau, \tau + \sigma_0[$, le derivate $\partial_{x_k} J(z,\zeta)$, $\partial^2_{x_j,x_k} J(z,\zeta)$, $YJ(z,\zeta)$. Risulta inoltre:*

(i) $$\partial_{x_k} J(z,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n \times]\tau,t[} \partial_{x_k} Z(z,w) \Phi(w,\zeta) dw$$

(ii) $$\partial^2_{x_j,x_k} J(z,\zeta) = \int_\tau^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \partial^2_{x_j,x_k} Z(z,w)\Phi(w,\zeta)dy \Big) ds$$

(iii) $$YJ(z,\zeta) = \int_\tau^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} YZ(z;y,s)dy \Big) ds - \Phi(z;\zeta).$$

Utilizzando i risultati sin qui ottenuti si puo' dire che, fissato $\zeta = (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ esiste una soluzione fondamentale con polo in (ξ,τ) definita per $t < \tau + \sigma_0$. Estendiamo ora questa soluzione a tutto lo spazio. Il prossimo lemma vale tanto per operatori in forma di divergenza quanto per operatori della forma (1.20).

Lemma 2.9. *(Principio del massimo). Sia data $u \in C(\mathbb{R}^n \times [\tau,\tau+\delta])$, $\delta > 0$, tale che esistano e siano continue sulla striscia aperta $\mathbb{R}^n \times]\tau,\tau+\delta]$ le derivate Yu e $\partial^2_{j,k}u$, per $j,k = 1,...,p_0$. Sia poi*

(i) $Lu \le 0$, in $\mathbb{R}^n \times]\tau,\tau+\sigma]$;

(ii) $u(\cdot,\tau) \ge 0$, in $\mathbb{R}^n$;

(iii) $\lim_{|x|\to\infty} \inf_{t\in[\tau,\tau+\delta]} u(x,t) \ge 0$

Allora risulta $u \ge 0$ in $\mathbb{R}^n \times [\tau,\tau+\delta]$.

La dimostrazione del lemma è standard.

Corollario 2.10. *(Proprietà di riproduzione* (cfr.§1, R4)). *Vale la seguente identità :*

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;y,s)\Gamma(y,s;\xi,\tau)dy,$$

per ogni $\tau < s < t$ tali che $t - \tau < \sigma_0$

Dimostrazione. Fissiamo $s \in]\tau,t[$ e consideriamo la funzione

$$G(z,\zeta) = \Gamma(z,\zeta) - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z;y,s)\Gamma(y,s;\zeta)dy. \tag{2.22}$$

Risulta $LR = 0$, in $\mathbb{R}^n \times]s,\tau+\sigma_0]$. Grazie ala Proposizione 2.7 si ha $G = 0$, per $t = s$. Verifichiamo (iii): Posto $w = (y,s)$,

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z,w)\Gamma(w,\zeta)dy| \le c\int_{R^n} \widetilde{\Gamma}(z,w)\widetilde{\Gamma}(w,\zeta)dy =$$
$$c\widetilde{\Gamma}(z,\zeta) \longrightarrow 0, \qquad |x| \to \infty, \text{ uniformemente in } t \in [s,\tau+\sigma_0]$$

In questo ultimo passaggio si è usato il fatto che $\widetilde{\Gamma}$ ha la proprietà di riproduzione (1.19) (che può essere verificato direttamente con un cambio di variabile). □

Usando la proprietà appena dimostrata, si può dare una definizione globale e non equivoca di Γ. Poniamo, fissato $\zeta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Gamma^*(z,\zeta) = \begin{cases} \Gamma(z,\zeta), & t < \tau + \sigma_0, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma\left(x,t;y,\tau+\frac{\sigma_0}{2}\right)\Gamma(y,\frac{\sigma_0}{2};\zeta)dy, & t \in \left]\tau+\frac{\sigma_0}{2},\tau+\frac{3}{2}\sigma_0\right[. \end{cases} \tag{2.23}$$

La Γ^* è ben definita (grazie alla proprietà di riproduzione) ed è soluzione fondamentale di L per $t \leq \tau + \frac{3}{2}\sigma_0$. Iterando il procedimento si ottiene una soluzione fondamentale di L definita su $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{\zeta\}$.

§3. Stime locali

Questo paragrafo è dedicato alla prova del Teorema 1.4. La proposizione che segue è analoga al Teorema 1.2 di [P1]. La verifica sarà fatta seguendo la stessa traccia. Per brevità proveremo la proposizione solo nel caso di $\zeta = 0$. Il caso generale risulta solo una complicazione formale dell'altro. Definiamo alcune costanti che utilizzeremo nel seguito.

Poniamo innanzitutto

$$\mu = \frac{\alpha}{Q}\frac{m^2}{2M}\frac{\lambda^2}{\Lambda(1+2\Lambda)} \tag{3.1}$$

(λ e Λ indicano il minimo e il massimo autovalore di $H(1)$ (cfr. (2.10)), m ed M sono le costanti dell'Ipotesi H2).

Fissiamo ora

$$\varepsilon = \varepsilon(\mu) = \frac{\mu}{3\mu + 4M}. \tag{3.2}$$

Poniamo poi, per $\varrho > 0$,

$$a^{\varrho}_{i,j}(z) = a_{i,j}(0) + \psi\left(\frac{|z|_B}{\varrho}\right)(a_{i,j}(z) - a_{i,j}(0)) \tag{3.3}$$

(ψ è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$ e tale che $\chi_{[0,\frac{1}{2}]} \leq \psi \leq \chi_{[0,1]}$). Non è difficile verificare che, se i coefficienti $a_{i,j}$ soddisfano le ipotesi H1 ed H3, anche le funzioni $a^{\varrho}_{i,j}$ le soddisfano, con costanti indipendenti da ϱ.

Scegliamo infine $\varrho = \varrho(\mu)$ tale che:

$$A^{\varrho}_0(z) \leq A_0(0) + \frac{\mu}{4} I_{p_0}. \tag{3.4}$$

Alla prova del Teorema 1.4 premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 3.2. *Indichiamo con Γ^+ e Γ^- rispettivamente le soluzioni fondamentali di $L^+ = div(A(0)+\mu J)D+Y$ ed $L^- = divA(0)D+Y$. Sia poi $\sigma^* \in]0,\sigma_0[$ tale che, per ogni $\sigma \in]0,\sigma^*[$ valga:*

$$\begin{cases} |\sigma| < \varepsilon = \varepsilon(\mu) \\ |\sigma g(\sigma)| < \varepsilon(\mu) \end{cases} \tag{3.5}$$

ove g indica una qualunque delle funzioni introdotte nei Lemmi 2.1, 2.2, 2.3. *Allora esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $z = (x,t), w = (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $0 < s < t < \sigma^*$, si ha:*

(i) $\quad Z^\varrho(z,w) \le c\Gamma^+(z,w),$

(ii) $\quad |\partial_{x_k} Z^\varrho(z,w)| \le \frac{c}{\sqrt{t-s}}\Gamma^+(z,w),$

(iii) $\quad |\partial^2_{x_j,x_k} Z^\varrho(z,w)| \le \frac{c}{t-s}\Gamma^+(z,w),$

(iv) $\quad |\Phi^\varrho(z,w)| \le \frac{c}{(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}\Gamma^+(z,w).$

(Z^ϱ e Φ^ϱ indicano, rispettivamente, la parametrice e la funzione Φ (vedi (2.5) per l'operatore $L^\varrho \equiv \mathrm{div} A^\varrho D + Y$).

La prova del Lemma 3.2 è a fine paragrafo. Non proveremo invece quanto segue:

Lemma 3.3. *Per ogni $k > 0$ esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\Gamma^+(z) = \Gamma^+(z,0) \le ct^{-\frac{Q\delta}{2}}\Gamma^-(z), \tag{3.6}$$

purchè sia $\Gamma^-(z) > k$ e $t < \sigma^*$. In (3.4) δ e c sono così definiti:

$$\delta = \frac{2M}{m^2}\frac{\Lambda(1+2\Lambda)}{\lambda^2}\mu$$
$$c = c(k) = \frac{1}{k^\delta}\left(\frac{2}{c_1}\right)^{\delta/2},$$

con c_1 costante assoluta.

Osservazione. Per la scelta di μ fatta in (3.1) risulta $\delta = \frac{\alpha}{Q}$. Quindi possiamo dire che

$$\begin{aligned} &\Gamma^+(z) \le ct^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma^-(z), \\ &c = c(k) = \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{Q}}}\left(\frac{2}{c_1}\right)^{\frac{\alpha}{2Q}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dimostrazione (del Teorema 1.4). Fissato $t < \sigma^*$ scriviamo Γ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) = Z(z) + \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^n} Z^\varrho(z,w)\Phi^\varrho(w,0)dy\Big)ds + \\ + \int_{\mathbb{R}^n\times[0,t]} (Z(z,w) - Z^\varrho(z,w))\Phi(w,0)dy\Big)ds + \\ + \int_{\mathbb{R}^n\times[0,t]} Z^\varrho(z,w)(\Phi(w,0) - \Phi^\varrho(w,0))dw = Z(z) + I_1(z) + I_2(z) + I_3(z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Osserviamo che esiste $k > 0$ tale che, se $Z(z) > k$, $t < \sigma^*$. Dunque, prendendo k abbastanza grande, possiamo usare il Lemma 3.2.

Ci limiteremo a stimare I_1 di (3.7). Le stime di I_2 e I_3 sono meno significative e si rimanda, per queste, a [P1]. Si ha:

$$|I_1| = |\int_{\mathbb{R}^n\times[0,t]} Z^\varrho(z,w)\Phi^\varrho(w,0)dw| \leq \text{(usando il Lemma 3.2)}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n\times[0,t]} c\Gamma^+(z,w)\frac{\Gamma^+(w,0)}{s^{1-\frac{\alpha}{2}}}dw = c\Gamma^+(z)t^{\alpha/2} \leq$$

(per il Lemma 3.3, noto che $Z(z,0) = Z(z) = \Gamma^-(z) > k$)

$$\leq c(k)t^{\frac{\alpha}{2}}t^{-\frac{\alpha}{2}}Z(z) = \frac{c}{k^{\frac{2\alpha}{Q}}}Z(z) < \varepsilon Z(z), \tag{3.8}$$

purchè si scelga k opportunamente grande. Mettendo assieme (3.8) e le stime di I_2 ed I_3 fatte in [P1] si ottiene la prova del Teorema 1.4. □

Dimostrazione (del Lemma 3.2). È facile riconoscere che i Lemmi 2.1, 2.2, 2.3, si estendono alle matrici

$$C_z^\varrho(t) = \int_0^t E(s)A^\varrho(z)E^T(s)ds, \tag{3.9}$$

con le stesse funzioni $t \longrightarrow g(t)$. Di conseguenza valgono le seguenti stime:

$$\frac{1}{\sqrt{\det C_w^\varrho(\sigma)}} \leq c_1\frac{1}{\sigma^{Q/2}} \leq c_2\frac{1}{\sqrt{\det C^+(\sigma)}} \leq c_3\frac{1}{\sigma^{Q/2}}, \quad \sigma \leq \sigma_0 \tag{3.10}$$

(qui $C^+(\sigma)$ indica la matrice $\int_0^\sigma E(s)(A(0)+\mu J)E^T(s)ds$).

Ciò premesso, dimostriamo la (ii) del Lemma 3.2. Per definizione di Z^ϱ si ha, posto $t-s=\sigma$, $x-E(t-s)y=\beta$, $D(1/\sqrt{\sigma})\beta=\eta$:

$$\partial_{x_k}Z^\varrho(z,w) = \frac{1}{\sqrt{\det C_w^\varrho(\sigma)}}\exp\Big(-\frac{1}{4}\langle(C_w^\varrho)^{-1}(\sigma)\beta,\beta\rangle\Big)\Big((C_w^\varrho)^{-1}(\sigma)\beta\Big)_k \leq$$

(utilizzando il Lemma (2.4)-(i))

$$\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{Q}{2}}}\exp\big(-\frac{1}{4}\langle(C_w^\varrho)^{-1}(\sigma)\beta,\beta\rangle\big)\frac{|\eta|}{\sqrt{\sigma}}\big) \leq \text{(poichè } \sigma \leq \sigma^*\text{, cfr. (3.4))}$$

$$\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{Q}{2}}}\exp\Big(-\frac{(1-\varepsilon)}{4}\langle(C_{w,0}^\varrho)^{-1}(1)\eta,\eta\rangle\Big)\frac{|\eta|}{\sqrt{\sigma}} \leq$$

(per la scelta di ϱ fatta in (3.4))

$$\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{Q}{2}}}\exp\Big(-\frac{(1-\varepsilon)}{4}\Big\langle\Big(\int_0^1 E_0(\tau)(A(0)+\frac{\mu}{4}J)E_0^T(\tau)d\tau\Big)^{-1}\eta,\eta\Big\rangle\Big)\frac{|\eta|}{\sqrt{\sigma}} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\sigma^{\frac{Q}{2}}}\frac{c}{\sqrt{\sigma}}\exp\Big(-\frac{(1-\varepsilon)}{4}\Big\langle\Big(\int_0^1 E_0(\tau)(A(0)+\frac{\mu}{2}J)E_0^T(\tau)d\tau\Big)^{-1}\eta,\eta\Big\rangle\Big). \tag{3.11}$$

Usando ancora il Lemma 2.2 si ha.

$$(1-\varepsilon)\Big\langle\Big(\int_0^\sigma E_0(\tau)(A(0)+\frac{\mu}{2}J)E_0^T(\tau)d\tau\Big)^{-1}\beta,\beta\Big\rangle \geq (\sigma \text{ soddisfa } (3.5))$$

$$\geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big\langle\Big(\int_0^\sigma E(\tau)(A(0)+\frac{\mu}{2}J)E^T(\tau)d\tau\Big)^{-1}\beta,\beta\Big\rangle \geq \tag{3.12}$$

(per la scelta di $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ fatta in (3.3))

$$\geq \Big\langle\Big(\int_0^\sigma E(\tau)(A(0)+\mu J)E^T(\tau)d\tau\Big)^{-1}\beta,\beta\Big\rangle.$$

Dalle catene di disuguaglianze (3.10), (3.11), (3.12) si ha

$$|\partial_{x_k}Z^\varrho(z,w)| \leq \frac{c}{\sqrt{t-s}}\Gamma^+(z,w),$$

purchè $t-s$ soddisfi (3.4). (iii) ed (iv) si provano in maniera analoga. □

Sarà utile nel seguito il seguente

Corollario 3.4. *Esistono $k>0$ e $c>0$ tali che, per $j \leq p_0$, risulta*

$$|\partial_{x_j}\Gamma(z,\zeta)| \leq c\Big(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\Big|D\Big(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\Big)(x-E(t-\tau)\xi)\Big|+1\Big)\Gamma(z,\zeta), \tag{3.13}$$

per ogni z,ζ tali che $Z(z,\zeta)>k$.

La prova del corollario si può ricostruire seguendo pedissequamente [P1], Proposizione 4.1.

§4. Formule di media e disuguaglianza di Harnack.

In questo paragrafo otteniamo delle formule di media per le soluzioni della equazione $\widehat{L}u = 0$ (con $\widehat{L} = L + \mathrm{tr}B$) che ci permetteranno di dimostrare una disuguaglianza di Harnack invariante per le soluzioni non negative di $Lu = 0$.

Supponiamo dapprima che i coefficienti $a_{i,j}$ siano di classe C^∞. In tal caso l'operatore è ipoellittico. Quindi, se indichiamo con $\widehat{\Gamma}(z,\zeta)$ la (una) sua soluzione fondamentale, questa è C^∞ fuori dalla diagonale. Detto $Y = \langle x, BD\rangle - \partial_t$, risulta:

$$\begin{aligned}\widehat{L} &= \mathrm{div}AD + Y + \mathrm{tr}B\\ \widehat{L}^* &= \mathrm{div}AD - Y\end{aligned} \tag{4.1}$$

($\widehat{L}^*$ indica l'aggiunto formale di $\widehat{L}$).

Come in [F], (cap.1, par.8) si può verificare che la funzione $z \longmapsto \widehat{\Gamma}(z_0, z)$ è soluzione fondamentale di $\widehat{L}^*$ con polo in z_0. Seguendo poi un procedimento standard (si veda, ad esempio [P1]), si perviene, posto, per ogni fissato $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\widehat{\Omega}_r(z_0) = \Big\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : \widehat{\Gamma}(z_0, z) > \frac{1}{r} \Big\}, \tag{4.2}$$

alla seguente formula di rappresentazione:

$$u(z_0) = \frac{1}{r} \int\limits_{\widehat{\Omega}_r(z_0)} \frac{AD\widehat{\Gamma} \cdot D\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma}^2} u - \frac{1}{r} \int\limits_{\widehat{\Omega}_r(z_0)} \big(r\widehat{\Gamma} - 1 - lg(r\widehat{\Gamma})\big) \widehat{L}u. \tag{4.3}$$

In (4.3) è inteso che $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}(z_0, z)$, $D\widehat{\Gamma} = (\partial_{x_1}\widehat{\Gamma}(z_0, z), \ldots, \partial_{x_n}\widehat{\Gamma}(z_0, z))$. Con un procedimento di regolarizzazione proviamo ora la (4.3) nel caso in cui le funzioni $a_{i,j}$ siano soltanto hölderiane (nel senso della Definizione 1.2).

Sia $J \in C_0^\infty(]-1, 1[)$ e tale che $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} J(|w|_B)dw = 1$. Poniamo, per ogni funzione $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$a_\varepsilon(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} a\big((D(\varepsilon)w)^{-1} \circ z\big) J\big(|w|_B\big) dw \tag{4.4}$$

Osservazione 4.1. *Le regolarizzazioni introdotte in* (4.4) *hanno la seguenti proprietà :*

(i) La funzione $a_\varepsilon(z)$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

(ii) Se a è B-hölderiana di esponente α, a_ε è $B-$hölderiana di esponente α uniformemente in ε.

(iii) Se per un $R > 0$ $a(z) =$cost. per $|z| > R$, risulta

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^{n+1}} |a_\varepsilon(z) - a(z)| = \omega(\varepsilon) \longrightarrow 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

(iv) Detta $A_\varepsilon(z)$ la matrice ottenuta mollificando tutti gli $a_{i,j}$, si ha:

$$mJ \leq A_\varepsilon(z) \leq MJ,$$

per ogni $\varepsilon > 0$, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(v) Se $a \in L^q(\mathbb{R}^{n+1})$, $\partial_1 a \in L^q(\mathbb{R}^{n+1})$,...,$\partial_{p_0} a \in L^q(\mathbb{R}^{n+1})$, $Ya \in L^q(\mathbb{R}^{n+1})$, si ha l'approssimazione globale, nello spazio di Sobolev associato alla famiglia di campi vettoriali ∂_1,...,∂_{p_0}, Y,

$$\|a_\varepsilon - a\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} + \sum_{j=1}^{p_0} \|\partial_j(a_\varepsilon - a)\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} + \|Y(a_\varepsilon - a)\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Poiché i risultati a cui siamo interessati sono di carattere locale, d'ora in poi supporremo che i coefficienti $a_{j,k}$ siano costanti per $|z|_B > R$. Questo può essere

ottenuto utilizzando i coefficienti $a^{\varrho}_{i,j}(z)$ definiti nel paragrafo precedente (cfr.(3.3)) e scegliendo $\varrho = R$.

Fatto ciò poniamo

$$\widehat{L}_\varepsilon = \mathrm{div} A_\varepsilon(z) D + Y + trB \tag{4.5}$$

e indichiamo con $\widehat{\Gamma}_\varepsilon$ la sua soluzione fondamentale. Per ogni u di classe C^∞ si ha:

$$u(z_0) = \frac{1}{r} \int\limits_{\widehat{\Omega}^\varepsilon_r(z_0)} \frac{A_\varepsilon D\widehat{\Gamma}_\varepsilon \cdot D\widehat{\Gamma}_\varepsilon}{\widehat{\Gamma}^2_\varepsilon} u - \frac{1}{r} \int\limits_{\widehat{\Omega}^\varepsilon_r(z_0)} \left(r\widehat{\Gamma}_\varepsilon - 1 - \lg(r\widehat{\Gamma}_\varepsilon)\right) \widehat{L}_\varepsilon u. \tag{4.6}$$

(con ovvia notazione per $\widehat{\Omega}^\varepsilon_r$). (4.6) si estende per densità alle funzioni di classe C^2 nelle prime p_0 variabili e che hanno derivata continua lungo il campo Y. Vale poi il seguente risultato:

Lemma 4.2. *Risulta, per ogni $z, z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$:*

(i) $\widehat{\Gamma}_\varepsilon(z_0, z) \longrightarrow \widehat{\Gamma}(z_0, z), \ \varepsilon \to 0,$

(ii) $\partial_{x_k} \widehat{\Gamma}_\varepsilon(z_0, z) \longrightarrow \partial_{x_k} \widehat{\Gamma}(z_0, z), \ \varepsilon \to 0.$

Dimostrazione. (Traccia) Si verifica innanzitutto che, per $t - \tau \leq \sigma_0$, risulta:

$$|Z_\varepsilon(z, \zeta) - Z(z, \zeta)| \leq c\omega(\varepsilon) \widetilde{\Gamma}(z, \zeta). \tag{4.7}$$

(dove Z_ε indica la parametrice dell'operatore L_ε. Dopodiché si prova per induzione che

$$|(LZ)_k(z, \zeta) - (L_\varepsilon Z_\varepsilon)_k(z, \zeta)| \leq kc^k \sqrt{\omega(\varepsilon)} \frac{G(\frac{\alpha}{4})^k}{G(\frac{\alpha k}{4})} \frac{1}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{4}(k+1)}} \bar{\Gamma}(z, \zeta). \tag{4.8}$$

($\bar{\Gamma}$ indica la soluzione fondamentale di un operatore della forma $K\Delta_{p_0} + Y$; G indica la funzione Gamma di Eulero). Non ci soffermiamo sulle prove di (4.7) e (4.8).

Passando al limite nella (4.6) si ottengono le formule di media cercate, per operatori a coefficienti hölderiani.

Proposizione 4.3. *(Formula di media) Sia u soluzione di $\widehat{L}u = 0$ in Ω aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$. Allora, per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste $r_0 = r_0(\Omega, L, z_0)$ tale che, per ogni $r \leq r_0$,*

$$u(z_0) = \frac{1}{r} \int_{\widehat{\Omega}_r(z_0)} \frac{\langle A(z) D\widehat{\Gamma}(z_0, z), D\widehat{\Gamma}(z_0, z)\rangle}{\widehat{\Gamma}^2(z_0, z)} u(z) dz. \tag{4.9}$$

Con un procedimento standard si possono ottenere ora delle formule di media con nuclei più regolari. Dapprima si considera, per $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ l'operatore $S = \widehat{L} + \Delta_y$. Questo appartiene alla stessa classe a cui appartiene $\widehat{L}$. Scritta la formula di media (4.9) per S ed integratala in y si ottiene il risultato seguente (cfr. [P1]:

Proposizione 4.4. *Sia u soluzione di $\widehat{L}u = 0$ in Ω aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$. Allora esiste per ogni $z_0 \in \Omega$ $r_0 > 0$ tale che, per ogni $r \leq r_0$, vale:*

$$u(z_0) = \frac{4\pi}{3r} \int\limits_{\widehat{\Omega}'_r(z_0)} \widehat{N}^3_r(z_0,z)\Big(\frac{\langle A(z)D\widehat{\Gamma}(z_0,z), D\widehat{\Gamma}(z_0,z)\rangle}{\widehat{\Gamma}^2(z_0,z)} + \frac{3}{20}\frac{\widehat{N}^2_r(z_0,z)}{(t_0-t)^2}\Big)u(z)dz.$$

dove

$$\widehat{\Omega}'_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\widehat{\Gamma}(z_0,z)}{(4\pi(t_0-t))^{3/2}} \equiv \widehat{\Gamma}'(z_0,z) \geq \frac{1}{r} \right\} \tag{4.11}$$

ed

$$\widehat{N}_r(z_0,z) = 2\sqrt{(t_0-t)\lg\left(r(\widehat{\Gamma}'(z_0,z))\right)}. \tag{4.12}$$

Per la prova si veda, ad esempio [P1].

La parte rimanente del paragrafo è ricostruita, con gli opportuni adattamenti, seguendo il procedimento di [P1]. Poniamo, per $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{L}_\lambda &= \lambda^2 D(\lambda)\widehat{L}D\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^2 D(\lambda)LD\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda^2 \mathrm{tr}B = \\ &= \mathrm{div}\big(A(D(\lambda)z)D\big) + \langle x, B_\lambda D\rangle - \partial_t + \mathrm{tr}B_\lambda, \end{aligned} \tag{4.13}$$

ove si è posto

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^2 * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^4 * & \lambda^2 * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{2r} * & \lambda^{2r-2} * & \lambda^{2r-4} * & \cdots & B_r \\ \lambda^{2r+2} * & \lambda^{2r} * & \lambda^{2r-2} * & \cdots & \lambda^2 * \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Indicheremo con $\widehat{\Gamma}_\lambda(\cdot,\zeta)$ la soluzione fondamentale di $\widehat{L}_\lambda$ con polo in ζ. Osserviamo che si scrive esplicitamente

$$\widehat{\Gamma}_\lambda(z,\zeta) = \lambda^Q \widehat{\Gamma}\big(D(\lambda)z, D(\lambda)\zeta\big). \tag{4.15}$$

Le soluzioni di $\widehat{L}_\lambda v = 0$ soddisfano la formula di media, per $r \leq r_0$ e $\lambda \leq 1$:

$$v(z_0) = \frac{1}{r} \int\limits_{\widehat{\Omega}'_{r,\lambda}(z_0)} \widehat{M}'_{r,\lambda}(z_0,z)v(z)dz, \tag{4.16}$$

in cui si è posto

$$\widehat{\Omega}'_{r,\lambda}(z_0) = \left\{ z : \widehat{\Gamma}'_\lambda(z_0,z) \geq \frac{1}{r} \right\} \tag{4.17}$$

$$\widehat{M}'_{r,\lambda}(z_0,z) = \frac{4}{3}\pi \widehat{N}^3_{r,\lambda}(z_0,z)\Big(\frac{\langle A(D(\lambda)z)D\widehat{\Gamma}_\lambda(z_0,z), D\widehat{\Gamma}_\lambda(z_0,z)\rangle}{\widehat{\Gamma}^2(z_0,z)} + \frac{3}{20}\frac{\widehat{N}^2_{r,\lambda}(z_0,z)}{(t_0-t)^2}\Big)$$

ed

$$\widehat{N}_{r,\lambda}(z_0,z) = 2\sqrt{(t_0-t)\lg(r\widehat{\Gamma}'_\lambda(z_0,z))}. \tag{4.18}$$

Lemma 4.5. *Esistono $\bar{r} = \bar{r}(L)$ e $\vartheta > 0$ tali che, per ogni $r_0 \leq \bar{r}$ e $\lambda \leq 1$ risulta*

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}'_{\frac{3}{4},\lambda}(0) &= \left\{ \widehat{\Gamma}'_\lambda(0,z) \geq \frac{1}{\frac{3}{4}r_0} \right\} \supseteq \\ &\supseteq H^-_{\vartheta r_0^{\frac{1}{Q+3}}}(0) \equiv H_{\vartheta_0^-}(0). \end{aligned} \tag{4.19}$$

La prova del lemma si ottiene utilizzando dapprima una versione uniforme in $\lambda \leq 1$ del Teorema 1.4 sulle stime locali e poi il Teorema 3.1 di [LP].

Dimostrazione. (della disuguaglianza di Harnack) Supponiamo dapprima $z_0 = 0$. Sia u soluzione non negativa di $Lu = 0$. Allora la funzione $v(z) = u(z)e^{ttrB}$ è soluzione di $\widehat{L}v = 0$. Basterà quindi provare il teorema per le soluzioni di $\widehat{L}$. Supponiamo dapprima $z_0 = 0$.Per ogni $\lambda \leq 1$, posto $u_\lambda = D(\lambda) \circ u$,si ha:

$$L_\lambda u_\lambda = 0, \text{ in } D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega.$$

Per poter scrivere la formula di media (4.16) occorre che sia:

$$\widehat{\Omega}'_{r_0,\lambda}(0) \subset D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega, \tag{4.19}$$

Fissiamo ora un r_0 per cui valga il Lemma 4.5 e per cui si possa scrivere la formula di media (con $\lambda = 1$). Dovrà essere:

(i) $\quad r_0 \leq \bar{r}$,

(ii) $\quad \widehat{\Omega}'_{r_0}(0) \subset \Omega$.

Osserviamo che se r_0 soddisfa (ii), è soddisfatta (4.19) e quindi si può scrivere la formula di media (4.16) per $\widehat{L}'_\lambda$, per ogni $\lambda \leq 1$. Infatti

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}'_{r_0,\lambda}(0) &= D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\widehat{\Omega}'_{r_0\lambda^{Q+3}}(0) \subseteq \\ &\subseteq D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\widehat{\Omega}'_{r_0}(0) \subseteq D\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Omega. \end{aligned}$$

Enunciamo senza provarlo il seguente

Lemma 4.6. *Esistono $\sigma > 0$ e $c > 0$ tali che:*

(i) $\quad \widehat{\Omega}'_{\sigma,\lambda}(\zeta) \subseteq \widehat{\Omega}'_{\frac{3}{4}r_0,\lambda}(0)$, *per ogni* $\zeta \in H^-_{\vartheta_0}$, $\quad \lambda \leq 1$

(ii) $\quad \widehat{M}'_{\sigma,\lambda}(\zeta, z) \leq c$, *per ogni* $\zeta \in H^-_{\vartheta_0}$, $\quad z \in \widehat{\Omega}'_{\sigma,\lambda}(\zeta)$.

Non riportiamo la prova del Lemma. Partendo dalla formula di media (4.16) per u_λ si ha:

$$u(0) = u_\lambda(0) = \frac{1}{r_0} \int_{\widehat{\Omega}'_{r_0,\lambda}(0)} \widehat{M}'_{r_0,\lambda}(0,z)u_\lambda(z)dz \geq$$

$$\left(\text{su } \widehat{\Omega}'_{\frac{3}{4}r_0,\lambda}(0) \text{ si ha } \widehat{M}'_{r_0,\lambda}(0,z) \geq c\frac{\widehat{N}^5_{r,\lambda}(0,z)}{(-t)^2} \geq c\sqrt{-t}\right)$$

$$\geq \frac{c}{r_0} \int\limits_{\widehat{\Omega}'_{\frac{3}{4}r_0,\lambda}(0)} \sqrt{-t}u_\lambda(z)dz \geq \text{(usando i Lemmi 4.5 e 4.6)} \geq$$

$$\geq \frac{c}{r_0}\vartheta_0 \int\limits_{\widehat{\Omega}'_{\sigma,\lambda}(\zeta)} u_\lambda(z)dz \geq cu_\lambda(\zeta), \text{ per ogni } \zeta \in H^-_{\vartheta_0}(0).$$

Perciò

$$u(0) \geq c \sup_{H^-_{\lambda\vartheta_0}(0)} u, \text{ per ogni } \lambda \leq 1,$$

che è la tesi, per $z_0 = 0$.

Se invece $z_0 \neq 0$, basta porre

$$M = \mathrm{div}A(z_0 \circ z)D + Y$$

ed osservare che se u è soluzione di L in Ω, la funzione $v(z) = u(z_0 \circ z)$ è soluzione di $Mv = 0$ in $z_0^{-1} \circ \Omega$.

□

BIBLIOGRAFIA

[F] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, New York, 1964.

[I] A.M. Il'In, *On a class of ultraparabolic equations*, Soviet Math. Dokl **4** (1964), 1673-1676.

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51.4** (1993), 137-171.

[P1] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche **XLIX** (1994), 53-105.

[P2] S. Polidoro, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Apparirà su Arch. Rat. Mech. Anal.

[S] I.M. Sonin, *On a class of degenerate diffusion processes*, Theory Probab. Appl. **12** (1967), 490-496.

[W] M. Weber, *The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 24-37.